$$\Rightarrow \quad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right]$$ Gauss方程

同理可证 (ii).

#

关于正交标架的曲面基本定理：设 $\{u,v\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中单连通区域 D.

给定五个一阶微分 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}\}$ 仅含在 D 上.

满足以下关系：

$$(*)\begin{cases} d\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \omega_{12}\\ -\omega_{12} & 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \\ d\omega_{12} = \omega_{13}\wedge\omega_{32} \\ d\omega_{13} = \omega_{12}\wedge\omega_{23} \\ d\omega_{23} = \omega_{13}\wedge\omega_{12} \end{cases} + (*)': \omega_1^2 + \omega_2^2 \text{ 在 } D \text{ 上处处正定}$$

则 $\exists$ 定义在 D 上的曲面 r，及其上的一组正交标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$，使得

$$dr = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$$

$$de_1 = \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3$$

$$de_2 = -\omega_{12} e_1 + \omega_{23} e_3$$

$$de_3 = -\omega_{13} e_1 - \omega_{23} e_2$$

证明：考察以 r, e_1, e_2, e_3 为未知函数的一阶偏微分方程组

$$(**)\quad \begin{cases} dr = w_1 \cdot e_1 + w_2 \cdot e_2 \\ de_1 = w_{12} e_2 + w_{13} e_3 \\ de_2 = -w_{12} e_1 + w_{23} e_3 \\ de_3 = -w_{13} e_1 - w_{23} e_2 \end{cases}$$

关于 $\{w_1, w_2, w_{12}, w_{13}, w_{23}\}$ 的方程 $(*)$，恰好是

$$d^2 r = d^2 e_i = 0.$$

写成偏导，是方程 $(**)$ 的可积条件.

故由一阶线性偏微分方程理论，知在 D 上存在解 r, e_1, e_2, e_3 满足 $(**)$.

我们仍需说明 r 为曲面，e_1, e_2, e_3 为 r 上的一组正交标架. 为此我们考察在 D 上关于 $\langle e_i, e_j \rangle$ $1 \le i, j \le 3$ 的一阶线性微分方程组

（为此，我们引进记号：$w_{ii} = 0 \ \forall i$；$w_{ij} = -w_{ji}$，$i > j$）

则由 $(**)$ 推出：

$$(***)\quad \begin{cases} d(\langle e_i, e_j \rangle) = \sum_k w_{ik} (\langle e_j, e_k \rangle) + \sum_k w_{jk} (\langle e_i, e_k \rangle) \\ \qquad 1 \le i \le j \le 3 \end{cases}$$

但是 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ 代入 $(***)$ 式，得

$$\text{左边} = 0, \quad \text{右边} = \sum_k w_{ik} \delta_{kj} + \sum_k w_{jk} \delta_{ki}$$

$$= w_{ij} + w_{ji} = 0$$

所以，我们在关于(*)的解 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 在 $\forall \in D$ 取初值

使得：$\{e_1(0), e_2(0), e_3(0)\}$ 是 $r(0)$ 处的

则 曲线 α 存在唯一性，$\alpha \equiv 0$，

$\{e_1, e_2, e_3\}$ 是定义在 D 上的一组光滑的正交标架.

由于 $(*)'$ 的解 $\begin{cases} \text{是} \\ \text{且 } dr = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \end{cases}$ $\forall r_u \wedge r_v \neq 0$,

故 r 是 D 上曲面. 且 $\{e_1, e_2\}$ 是 r 与 $\{r_u, r_v\}$ 之间线性表出.

故 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 r 诱导的一组正交标架.

#

总结起来：$D = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$

D 上的曲面 $\{r = r(u,v)\}$ $\xrightarrow[\text{II} = \langle dr, dn \rangle]{\text{I} = \langle dr, dr \rangle}$ $\{\text{I}(u,v), \text{II}(u,v)\}$

$\xleftarrow{+ \text{Gauss-Codazzi 方程 (3 个方程)}}$

$d\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ -w_{12} & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$+$

$dw_{ij} = \sum w_{ik} \wedge w_{kj}$

$\Leftrightarrow$ Gauss-Codazzi 方程

对自然标架 $\{r_u, r_v\}$ 施行

Gram-Schmidt 正交化

得正交标架 $\phi + \begin{pmatrix} \cos\theta(u,v) & \sin\theta(u,v) \\ -\sin\theta(u,v) & \cos\theta(u,v) \end{pmatrix} \Rightarrow$ 所有正交标架

- $\{e_1, e_2, e_3\}$
- $w_i = \langle dr, e_i \rangle$
- $w_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle$

$\{w_1(u,v), w_2(u,v), w_{ij}(u,v), 1 \le i < j \le 3\}$

$\text{I} = w_1 \cdot w_1 + w_2 \cdot w_2$

$\text{II} = w_1 \cdot w_{13} + w_2 \cdot w_{23}$

可积

基本公式：$d\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ -w_{12} & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$，$dw_{12} \left(= d(\text{标架}) \wedge w_{32}\right) = -K w_1 \wedge w_2$

§12 Levi-Civita 联络

Levi-Civita：意大利物理学家。

他的一个重要数学贡献：为黎曼度量引入了相容的联络形式；由此我们可以恰当得定义一般黎曼流形的曲率。

定义：一个局部的二维黎曼流形，是指 $(D; I)$ 其中

(1) $D \subset \mathbb{R}^2$ ($D = \{u, v\}$) 单连通开集

(2) $I = I(u, v)$ 为定义在 D 上的正定对称二次型。

一般的：一个局部 n 维 $(n \geq 1)$ 黎曼流形，是指 (D, I)，其中

(1) $D \subset \mathbb{R}^n$ ($D = \{x^1, \dots, x^n\}$) 为单连通开集

(2) $I = I(x^1, \dots, x^n) = \sum g_{ij} dx^i dx^j$ D 上的正定二次型。（黎曼度量）

例子：(局部) (1) 一维黎曼曲线

$$((a, b), f(t)(dt)^2), \qquad f(t) > 0, \ \forall t \in (a, b)$$

(2) $$\left(\mathbb{R}^2, \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{a^2}(u^2 + v^2)\right)^2}(du^2 + dv^2)\right), \quad a > 0 \text{ 常数},$$

(3) $(\mathbb{R}^2, du^2 + dv^2)$ 欧氏平面

(4) $$\left(D, \frac{4}{(1 - (u^2 + v^2)^2)^2}(du^2 + dv^2)\right)$$ Poincaré 单位圆盘

单位圆盘 $= \{u^2 + v^2 < 1\}$

(5) $\left(H, \dfrac{du^2+dv^2}{v^2}\right)$.

$H = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid v>0\}$

(6) $(D,\ E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)$ $\quad \begin{pmatrix} E, & F \\ F, & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u,v), & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix} > 0$

$\forall (u,v)\in D$.

(7), $(\mathbb{R}^3,\ dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)$, 正欠氏三维空间.

合思定义: 设 $(D, I=\sum_{1\le i,j\le n} g_{ij}dx^i dx^j)$ 为 n 维等量流形.

现有: $\tilde{D} \xrightarrow{F} D$, $\quad F=(f^1,\dots f^n)$, $\quad m\le n$

$\tilde{D}\subset\mathbb{R}^m$, $\quad D\subset\mathbb{R}^n$, $\quad f^i = f^i(y^1,\dots y^m)$, $\quad i=1,\dots,n$

为其中 $\tilde{D}\subset\mathbb{R}^m$ 为单连通区域, F 为 C^∞-单射. 且, $\forall (y^1,\dots y^m)\in D'$

$$\operatorname{rank}(J(F)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y^m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^m} \end{pmatrix}_{n\times m} \text{ 处处 } = m.$$

则 $\tilde{I} \triangleq \sum (g_{ij}\circ F)\cdot df^i df^j$

$$= \sum_{1\le i,j\le m} \tilde{g}_{ij}\, dy^i dy^j, \quad \text{其中}$$

$$(\tilde{g}_{ij})_{m\times m} = J(F)^T_{m\times n}(g_{ij})_{n\times n}\cdot J(F)_{n\times m}$$

为 $\tilde{D}$ 上的正定二次型.

$(\tilde{D}, \tilde{I})$ 称为由 F 诱导的 (m 维) 等量流形. 记 ~~$(\tilde{D},\tilde{I}) = F^*(D,I)$~~

记 $\tilde{I} = F^*(I)$

证明：习题.

#

$\boxed{\text{特例}}$：$\tilde{D} \xrightarrow{r} D = \mathbb{R}^3$，$I = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

$\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$

则 曲面 r 的第一基本型 $= r^* I$.

证明：习题.

#

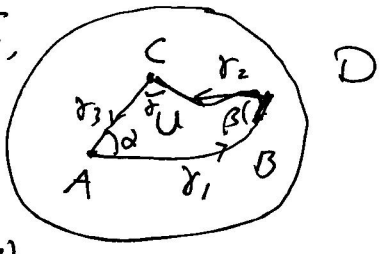
所谓的曲面的内蕴几何就是关于二维黎曼流形 (D, I) 的几何. $D \subset \mathbb{R}^2$

~~也就是关于~~

问题：光有 I，我们谈什么样的几何呢？

回答：(1) 平面几何的一大块内容就是关于 $(D, I) = (\mathbb{R}^2, du^2 + dv^2)$ 的几何，所以上述几何是平面几何的自然推广.

(2) 对于曲线 $\gamma \subset D$，我们可以利用 I，计算定义 γ 的弧长.



特别得：对给定两点 A, B，我们定义连接 AB 的"直线"为所有连接 AB 的曲线中最短的那条.

（详见测地线的学习内容）

(3) 对于闭合曲线 γ 围成的区域 U，我们可以计算 U 的面积

（令 $I = E(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2$，其面积元 $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$）

(4) $\forall p \in D$，我们可以利用高斯的曲率公式定义一种曲率函数 $K(p)$.

这种曲率函数 K 有一性质：

令 $(\tilde{D}, \tilde{I}) \xrightarrow{F} (D, I)$ 为等距同构.

则 $K_{\tilde{D}} = K_D \circ F \quad (= F^*(K_D))$

思考题：为什么用高斯关于 E, F, G 及其一阶、二阶偏导定义的函数为一种"合理"的曲率函数呢？

(5) 高斯第三定理（高斯称该定理为内蕴曲面几何（局部）中最为优美的定理）：

设 $\triangle ABC$ 为测地三角形，即 $\underbrace{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}_{三边}$ 均为测地线，

则 $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_U K\, dA$，（$U$ 为 $\triangle ABC$ 围成的内部区域）

问题：我们原来的曲面几何和曲面内蕴几何相较有何联系？

回答：曲面几何 $= (D, I, II)$ 的几何

I, II 满足 Gauss-Codazzi

$= (D, I)$ 的几何 $+$ II 的几何

II 的几何 关注：$(D, I) \xrightarrow{F} (\mathbb{R}^3, (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)$

给定 (D, II)，F 的选取，使得 $F^*(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}) = I$.

经典例子：$(D, I) = (D, du^2 + dv^2)$

$F_1 = \mathbb{R}^3$ 中的平面，$F_2 =$ 圆柱，$F_3 =$ 圆锥.

思考题：是否对任意 (D, I)，$\exists\, \mathbb{R}^3$ 中曲面 γ，使得 (D, I) 为 γ 的第一基本型？局部呢？

问题：Levi-Civita 联络在 (D, I) 的几何中起何作用？

回答：桥梁作用：

$$(D, I) \rightsquigarrow \text{Levi-Civita 联络} \rightsquigarrow (\text{零量})\text{曲率}$$

$\overset{\shortparallel}{\text{零量}}$

Levi-Civita 联络的算法定义：

(1) 找二个1形式 w_1, w_2，使得

$$I = w_1^2 + w_2^2.$$

算法：
$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$= \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}dv\right)^2 + \underbrace{\left(G - \frac{F^2}{E}\right)}_{\frac{EG-F^2}{E}}dv^2$$
$$= \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}dv\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}dv\right)^2$$

令
$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{E}\,du + \frac{F}{\sqrt{E}}dv \\ w_2 = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}dv \end{cases}, \quad (w_1, w_2) = (du, dv)\begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ \frac{F}{\sqrt{E}} & \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}} \end{pmatrix}$$

命题：设 $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ 亦满足 $\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2 = I$. 则 $\exists\ \theta = \theta(u,v)$, s.t.

$$(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = (w_1, w_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

证明：因为 I 正定，所以 $\{w_1, w_2\}$ 为 Ω 的一组 $\mathcal{O}$-基. 即

$$\{w_1, w_2\} = \{du, dv\}.A, \quad \underbrace{\det A \neq 0}_{A \in M_2(\mathcal{O}),\ \text{且}}$$

令 $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\} = \{w_1, w_2\}\cdot B$.

则 $\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2 = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)\begin{pmatrix}\tilde{w}_1\\ \tilde{w}_2\end{pmatrix}$

$$= (w_1, w_2)\, B\cdot B^T \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix} = (w_1, w_2)\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B\cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta\\ -\sin\theta, & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \theta = \theta(u, v).$$

#

(2) 对步骤(1)中的$\{w_1, w_2\}$，存在唯一的w_{12}，1形式，满足方程

$$d\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12}\\ -w_{12} & 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}$$

对于不同选取$\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$，则有

$$\tilde{w}_{12} = w_{12} + d\theta.$$

证明：$dw_1 \cdot w_1\wedge w_2$ 为 $\Omega^2 = \mathcal{O}\{du\wedge dv\}$ 的基，则

$$\exists\, a, b \in \mathcal{O} \text{ s.t. } \begin{cases} dw_1 = \cancel{a w_1 + b w_2} \quad a w_1\wedge w_2\\ dw_2 = \qquad\qquad b w_1\wedge w_2\end{cases}$$

令 $\underline{w_{12} = a w_1 + b w_2}$，则有

$$dw_1 = (a w_1 + b w_2)\wedge w_2 = w_{12}\wedge w_2$$

$$dw_2 = w_1\wedge(a w_1 + b w_2) = w_1\wedge w_{12} = -w_{12}\wedge w_1$$

设 w_{12}' 满足

$$d\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12}' \\ -w_{12}' & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

则 $$\begin{pmatrix} 0 & w_{12}' - w_{12} \\ -(w_{12}' - w_{12}) & \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (w_{12}' - w_{12}) \wedge w_1 = (w_1' - w_{12}) \wedge w_2 = 0$$

$$\Rightarrow w_{12}' - w_{12} = 0.$$

改设 $$\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\} = \{w_1, w_2\} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{w}_1 \wedge \tilde{w}_2 = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot w_1 \wedge w_2 = w_1 \wedge w_2$$

~~$d\tilde{w}_1 = d(\cos\theta w_1 - \sin\theta$~~

$$\tilde{w}_1 + i\tilde{w}_2 = e^{i\theta} \cdot (w_1 + i w_2)$$

~~$\Rightarrow d(\tilde{w}_1 + i\tilde{w}_2) = d(\tilde{w}_1) + i\, d(\tilde{w}_2)$~~

$$\Rightarrow d\left(e^{i\theta} \cdot (w_1 + i w_2)\right) = i \cdot d\theta \cdot e^{i\theta} \wedge (w_1 + i w_2) + e^{i\theta} d(w_1 + i w_2)$$

已知:

(请验证)
$$\begin{cases} d(w_1+iw_2) = iw_{12}\wedge(w_1+iw_2) \\ d(\tilde{w}_1+i\tilde{w}_2) = i\tilde{w}_{12}\wedge(\tilde{w}_1+i\tilde{w}_2) \end{cases}$$

$$= i\tilde{w}_{12}\wedge e^{i\theta}(w_1+iw_2)$$

$$= ie^{i\theta}\tilde{w}_{12}\wedge(w_1+iw_2)$$

故 $$(\cancel{ie^{i\theta}})d\theta\wedge(w_1+iw_2)+\cancel{ie^{i\theta}}w_{12}\wedge(w_1+iw_2)$$

$$= \cancel{ie^{i\theta}}\tilde{w}_{12}\wedge(w_1+iw_2)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{w}_{12} = d\theta + w_{12}$$

#

定义: w_{12} 称为 I 在基 $\{w_1,w_2\}$ 下的 Levi-Civita 联络 1-形式.

命题: dw_{12} (2形式) 与基选取无关, 从而是 I 相对的不变量.

注意到: 另一个2形式 $w_1\wedge w_2$ 是 I 的面积元, 亦与基的选取无关

定义: 令 (P,I) 为二维特殊流形, 定义其曲率 (或高斯曲率) K 为

$$K \triangleq -\frac{dw_{12}}{w_1\wedge w_2} \quad \left(= \frac{d\tilde{w}_{12}}{\tilde{w}_1\wedge\tilde{w}_2}\right).$$

Levi-Civita 联络的几何解释